المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية

تصحيح الوطني 2015 الدورة العادية

المادة: الرياضيات

الشعبة : علوم اقتصادية وتدبير محاسباتي

GROUPE des INSTITUTS EXCEL

التمرين الأول :

المتتالية (u_n) معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1- حساب u_2 و u_1 :

لدينا : $u_1 = \frac{1}{5}u_0 + 1 = \frac{1}{5} * 1 + 1 = \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5}$

$u_2 = \frac{1}{5}u_1 + 1 = \frac{1}{5} * \frac{6}{5} + 1 = \frac{6}{25} + 1 = \frac{31}{25}$

2- لنبين بالترجع أن :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N} \qquad u_n < \frac{5}{4}$$

من أجل n=0 :

لدينا $u_0 = 1$ إذن $u_0 < \frac{5}{4}$

نفترض أن $u_n < \frac{5}{4}$ و لنبين أن $u_{n+1} < \frac{5}{4}$

لدينا $u_n < \frac{5}{4}$ إذن $\frac{1}{5}u_n < \frac{1}{5} * \frac{5}{4}$ أي $\frac{1}{5}u_n < \frac{1}{4}$

و منه $\frac{1}{5}u_{n+1} < \frac{1}{4} + 1$ و بالتالي $u_{n+1} < \frac{5}{4}$

استنتاج : حسب مبدأ الترجع نستنتج أن :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N} \qquad u_n < \frac{5}{4}$$

3-أ لنبين أن : $\forall n \epsilon \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5}\left(u_n - \frac{5}{4}\right)$

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + 1 - u_n = -\frac{4}{5}u_n + 1$

$= -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5} * \frac{5}{4}$

$= -\frac{4}{5}\left(u_n - \frac{5}{4}\right)$

ب- استنتاج:

بما أن $u_n < \frac{5}{4}$ حسب السؤال **1**) فإن $u_n - \frac{5}{4} < 0$

و منه $-\frac{4}{5}\left(u_n - \frac{5}{4}\right) > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$

و بالتالي u_n تزايدية

و بما أن (u_n) تزايدية و مكبورة بالعدد 5/4 فإنها متقاربة حسب مصاديق التقارب

4- نضع :

$$v_n = u_n - \frac{5}{4}$$

أ – حساب v_0 :

$$v_0 = u_0 - \frac{5}{4} = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$$

ب- لنبين أن v_n هندسية :

لدينا :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{1}{5}u_n + 1 - \frac{5}{4} = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{5}\left(u_n - \frac{5}{4}\right)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

و منه (v_n) هندسية أساسها q= 1/5 :

ج- حساب v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 * q^n$$

$$= -\frac{1}{4} * \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

استنتاج : نعلم أن

$v_n = u_n - \frac{5}{4}$ ومنه $u_n = v_n + \frac{5}{4}$

$u_n = -\frac{1}{4}(\frac{1}{5})^n + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left[5 - (\frac{1}{5})^n\right]$

د- حساب : $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left[5 - (\frac{1}{5})^n\right]$$

$$= \frac{1}{4}(5-0) = \frac{5}{4}$$

التمرين الثاني :

$$f(x) = x + \frac{2}{x} + lnx$$

1- أ – لنبين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب- لنبين أن :

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ و $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \frac{2}{x} + \ln x}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} + \frac{\frac{2}{x}}{x} + \frac{lnx}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{lnx}{x} = 1$$

($\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ لأن و $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$)

$$I = [xlnx]_1^e - \int_1^e x.\frac{1}{x}dx$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} x + \frac{2}{x} + \ln(x) - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + lnx = +\infty$$

($\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ لأن و $\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$)

التأويل الهندسي :

(Cf) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذي المعادلة y=x بجوار +∞

2- أ- لنتحقق أن :

$$\forall x\epsilon]0,+\infty[\quad f(x) = x + \frac{2 + xlnx}{x}$$

$$f(x) = x + \frac{2}{x} + lnx$$

$$= x + \frac{2}{x} + \frac{xlnx}{x}$$

$$f(x) = x + \frac{2 + xlnx}{x}$$

ب- حساب $\lim_{x\to0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x + \frac{2 + xlnx}{x} = +\infty$$

لأن $\lim_{x\to0^+} x = 0$

$\lim_{x\to0^+} \frac{2 + xlnx}{x} = +\infty$ ومنه $\lim_{x\to0^+} xlnx = 0$ و

التأويل الهندسي : (Cf) يقبل مقارب عموديا معادلته :

x=0 بجوار 0 على اليمين

3- أ – حساب $f'(x)$

$$f'(x) = \left(x + \frac{2}{x} + lnx\right)'$$

$$= 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - 2 + x}{x^2}$$

ب- لنتحقق أن :

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x+2)}{x^2}$$

بما أن $(x-1)(x+1)=x^2+2x-x-=x^2+x-2$

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x+2)}{x^2}$$ فإن :

$$f''(x)=\frac{-x^2+4x}{x^4}=\frac{x(4-x)}{x^4}=\frac{4-x}{x^3}$$

ب- دراسة إشارة $f''(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 4-x=0\Leftrightarrow x=4$$
$$f''(x)>0\Leftrightarrow 4-x>0\Leftrightarrow -x<-4\Leftrightarrow 0<x<4$$

$$f''(x)<0\Leftrightarrow 4-x<0\Leftrightarrow -x<-4\Leftrightarrow x>4$$

نلخص النتائج كما يلي :

x	0	4	+ ∞
f"(x)	+		-
Cf	∪	I	∩

نقطة انعطاف $I(4,f(4))$

يقبل نقطة انعطاف (Cf) $4,\frac{9}{2}+ln2$

$$f(4)=4+\frac{2}{4}+\ln(4)$$

$$=4+\frac{1}{2}+2ln2$$

$$=\frac{9}{2}+2\ln(2)$$

5- أ – لنحسب

باستعمال المكاملة بالأجزاء $I=\int_1^e lnx\,dx$

$$U'(x)=1 \quad U(x)=x$$
$$V(x)=\ln x \quad V'(x)=\frac{1}{x}$$

$$=eln(e)-1\ln(1)-[x]_1^e$$

$$=e-(e-1)=1$$

دراسة إشارة التعبير $(x-1)(x+2)$ على المجالين $[1,+\infty[$و$]0,1]$

على المجال $[1,+\infty[$ **:**

$x\geq 1$ إذن $\begin{matrix}x-1\geq 0\\ x+2\geq 3\end{matrix}$ إذن $(x-1)(x+2)\geq 0$

على المجال $]0,1]$ **:**

$0<x\leq 1$ إذن $\begin{matrix}x-1\leq 0\\ 2<x+2\leq 3\end{matrix}$ إذن $(x-1)(x+2)\leq 0$

ملاحظة : على اعتماد جدول الإشارة

x	0	1	+∞
(x-1)(x+2)		-	+

ج- استنتاج الرتابة:

بما أن $f'(x)\geq 0$ على $[1,+\infty[$

و $f'(x)\leq 0$ على $]0,1]$

فإن f تزايدية على $[1,+\infty[$ و تناقصية على$]0,1]$

د- جدول تغيرات :

x	0	1	+∞
f'(x)	-	+	
f(x)	+∞ ↘	3	↗ +∞

4- أ – لنتحقق أن :

$$\forall x\epsilon\ ]0,+\infty[\quad f''(x)=\frac{4-x}{x^3}$$

$$f''(x)=\left(\frac{x^2+x-2}{x^2}\right)'$$

$$=\frac{(x^2+x-2)'x^2-(x^2+x-2)(x^2)'}{x^4}$$

$$= \frac{(2x+1)x^2 - 2x(x^2+x-2)}{x^4}$$

$$= \frac{2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 + 4x}{x^4}$$

$$= \frac{-x^2 + 4x}{x^4}$$

ب- مساحة الجزء المخدش :

$$S = \int_1^e |f(x) - x| dx \quad (UA)$$

$$= \int_1^e (f(x) - x) dx \quad (UA)$$

لأن (Cf)يوجد فوق المستقيم ذي المعادلة y=x على المجال $[1, e]$:

و عليه :

$$S = \int_1^e \left(x + \frac{2}{x} + \ln(x) - x\right) dx \quad (UA)$$

$$= \int_1^e \left(\frac{2}{x} + lnx\right) dx \quad (UA)$$

$$= 2\int_1^e \frac{1}{x}\, dx + \int_1^e lnx \quad dx \quad (UA)$$

$$= 2[lnx]_1^e + I \ (UA)$$

$$= 2(\ln(e) - \ln(1)) + I \quad (UA)$$

$$= 2 + 1\ (UA) = 3(UA)$$

التمرين الثالث :

طرقة السحب : (2) كرتين في أن واحد

1-عدد خالات السحب الممكنة هو :

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!\,(8-2)!}$$

$$= \frac{8 * 7 * 6!}{2 * 6!} = 28$$

2-أ - A يعني سحب"$2R$" أو $2V$

إذن $card(A) = C_5^2 + C_3^2$

$= 10 + 3 = 13$

و بما أن $card\ \Omega = 28$

فإن $P(A) = \frac{card(A)}{card\Omega} = \frac{13}{28}$

ب- B هو الحدث المضاد ل A وعليه :

$$P(B) = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{1}{28} = \frac{15}{28}$$

3-أ- $[X = 0]$ **يعني عدد الكرات الخضراء المسحوبة هو 0**

و عليه $P[X = 0] = \frac{C_5^2}{28} = \frac{10}{28}$

(لأن الكرتين المسحوبتين لونهما أحمر)

ب- ملأ الجدول يستلزم فقط الإشارة إلى أن :

$P[X = 1] = P(B)$ لأن $X = 1$ يعني سحب كرة واحدة

خضراء و من الأخرى حمراء يعني الكرتان مختلفتا اللون

$P[X = 2] = P(C)$ حيث C الحصول على كرتين لونهما أخضر

و عليه $P[X = 2] = \frac{C_3^2}{28} = \frac{3}{28}$

و منه نحصل على الجدول :

x_2	0	1	2
$P[X = x_2]$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

ج- الأمل الرياضي :

$$E(x) = 0 * \frac{10}{28} + 1 * \frac{15}{28} + 2 * \frac{3}{28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$