تصحيح موضوع الرياضيات
مسلك العلوم الاقتصادية ومسلك علوم التدبير المحاسباتي 2014

التمرين الأول:

$$\begin{cases} \mu_0 = 1 \\ \mu_{n+1} = \frac{1}{2}\mu_n + \frac{1}{4}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) لديـنــا :

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\mu_o + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

2) البرهان بالترجع:

* من أجل $n = o$ لدينا $\mu_o = 1$ إذن $\mu_0 > \frac{1}{2}$ عبارة صحيحة.

* نفترض أن: $\mu_n > \frac{1}{2}$ حيث $n \in \mathrm{IN}$

* نبين أن : $\mu_{n+1} > \frac{1}{2}$

لدينا حسب الافتراض $\mu_n > \frac{1}{2}$

إذن: $\frac{1}{2}\mu_n > \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ أي $\frac{1}{2}\mu_n > \frac{1}{4}$

ومنه: $\frac{1}{2}\mu_n + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ أي $\mu_{n+1} > \frac{1}{2}$

وبالتالي حسب مبدأ الترجع $\mu_n > \frac{1}{2}$ لكل n من IN

3) أ لدينا : $\mu_{n+1} - \mu_n = \frac{1}{2}\mu_n + \frac{1}{4} - \mu_n$

$$= -\frac{1}{2}\mu_n + \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}(\mu_n - \frac{1}{2})$$

ب لدينا $\mu_n > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu_n - \frac{1}{2} > 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(\mu_n - \frac{1}{2}) < 0$$

إذن: $\mu_{n+1} - \mu_n < 0$ ومنه (μ_n) متتالية تناقصية

بما أن (μ_n) متتالية تناقصية ومصغورة ب $\frac{1}{2}$ فإنها متقاربة

4) $V_n = \mu_n - \frac{1}{2}$ لكل n من IN

1 لدينا $V_0 = \mu_0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2 لدينا:
$$V_{n+1} = \mathcal{U}_{n+1} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{2}(u_n - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}V_n$$

إذن $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ لكل n من IN

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0 = \frac{1}{2}$

ج لدينا: $V_n = V_0 \times q^n$ أي $V_n = \frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^n$

ومنه $V_n = (\frac{1}{2})^{n+1}$

وبما أن $V_n = u_n - \frac{1}{2}$ فإن
$$u_n = V_n + \frac{1}{2}$$
$$= (\frac{1}{2})^{n+1} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n)$$

د بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}$$

التمرين الثاني:

$$f_{(x)} = (x-1)^2 e^x$$

1) أ لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 e^x = +\infty$$

لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

ب
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 \frac{e^x}{x} = +\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty0} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (نهاية أساسية)

التأويل الهندسي: المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

ج لكل x من IR^* : $f(x) = (x-1)^2 e^x = \frac{(x-1)^2}{x^2} x^2 e^x = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 x^2 e^x$

د لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 x^2 e^x = 0$$

لأن $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1$ و $\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0$ (نهاية أساسية) التأويل الهندسي :

المنحنى (C) يقبل مقارب أفقي معادلته $y = 0$ بجوار $-\infty$.

2) أ لدينا: $f'(x) = ((x-1)^2)' e^x + (x-1)^2 (e^x)'$

$= (x^2 - 2x + 1)' e^x + (x-1)^2 e^x$

$= (2x-2) e^x + (x-1)^2 e^x$

$= (2x - 2 + (x-1)^2) e^x$

$= (2x - 2 + x^2 - 2x + 1) e^x$

ومنه لكل x من IR ، $f'(x) = (x^2 - 1) e^x$

ب لدينا $e^x > 0$ لكل x من IR

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2 - 1$

لدينا: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x = 1$ أو $x = -1$

ومنه إشارة $x^2 - 1$ هي إشارة a خارج الجذرين وعكس إشارة a داخل الجذرين

أي: $f'(x) \geq 0$ على المجالين $[1; +\infty[$ و $]-\infty; -1]$

و $f'(x) \leq 0$ على المجال $[-1; 1]$

• $f(-1) = (-1-1)^2 e^{-1} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$

$f(1) = (1-1)^2 e^1 = 0$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0	↗	$+\infty$

3) لدينا F دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وهي

$x \to x^2 - 4x + 5$ و $x \to e^x$

و $F'(x) = (x^2 - 4x + 5)'e^x + (x^2 - 4x + 5)(e^x)'$
$= (2x - 4)e^x + (x^2 - 4x + 5)e^x$

$$= (2x - 4 + x^2 - 4x + 5)e^x$$

$$= (x^2 - 2x + 1)e^x$$

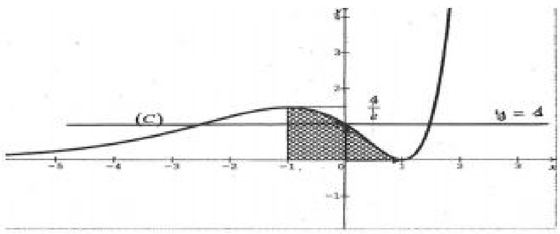
$$= (x - 1)^2 e^x$$

أي$F'(x) = f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ومنه F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

4) أ مساحة حيز المستوى المخذش هي :

f موجبة على المجال $[-1,1]$: $A = \int_{-1}^{1} f(x)dx \ (ua)$

$= [(x^2 - 4x + 5)e^x]_{-1}^{1}$
$= (1 - 4 + 5)e^1 - (1 + 4 + 5)e^{-1}$
$= (2e - 10e^{-1}) \ (ua)$



2 عدد حلول المعادلة f (x)=1 هو عدد نقط تقاطع المنحنى(C) والمستقيم ذو المعادلة $y = 1$ (أنظر الشكل)

إذن عدد حلول المعادلة هو 3.

التمرين الثالث

| 3R | 4V | 2B |

1) كل سحبة هي ترتيبة بدون تكرار لكرتين من بين تسع كرات إذن، عدد حالات السحب هو:

$$card\Omega = A_9^2 = \ 9\times8 = 72$$

2) أ لدينا :

1 A" الأولى بيضاء والثانية من أي لون"

$$P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{A_2^1 \times A_8^1}{72} = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$$

2 B" كرتين من نفس اللون".

$$P(B) = \frac{card\ B}{card\ \Omega} = \frac{A_3^2 + A_4^2 + A_2^2}{72} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

ومنه: $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$

3) احتمال شرطي:

$$P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)}$$

$A \cap \bar{B}$ هو: سحب كرتين من لونين مختلفين والكرة الأولى بيضاء

إذن : $P(A \cap \bar{B}) = \frac{A_2^1 \times A_7^1}{72} = \frac{7}{36}$

ومنه: $P_A(\bar{B}) \frac{7}{36} \times \frac{9}{2} = \frac{7}{8}$

4) $(X = 0)$ عدم سحب أي كرة بيضاء $P(X = 0) = \frac{A_7^2}{72} = \frac{7}{12}$

$(X = 1)$ سحب كرة واحدة بيضاء فقط $P(X = 1) = \frac{(A_2^1 \times A_7^1) \times 2}{72} = \frac{7}{18}$

$(X = 2)$ سحب كرتين بيضاويتين : $P(X = 2) = \frac{A_2^2}{72} = \frac{1}{36}$

قانون إحتمال X:

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{36}$