أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2011

التمرين الأول :

1 أ

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2-2x-3=0$

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4(-3)=16$

إذن : المعادلة تقبل حلين حقيقيين x_1 و x_2 :

$$x_1=\frac{2-\sqrt{16}}{2}=-1 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{2+\sqrt{16}}{2}=3$$

1 ب

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^x-\frac{3}{e^x}-2=0$

بعد توحيد المقام نحصل على : $\frac{e^{2x}-3-2e^x}{e^x}=0$

يعني : $e^{2x}-2e^x-3=0$

نضع : $t=e^x$. إذن المعادلة تُصبح : $t^2-2t-3=0$

و نعلم حسب السؤال 1) أ) أن : حلي هذه المعادلة هما -1 و 3 .

إذن : $t=-1$ أو $t=3$

يعني : $e^x=-1$ أو $e^x=3$

نعلم أن : $e^x>0$; $(\forall x\in\mathbb{R})$

إذن المعادلة $e^x=-1$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$. و بالتالي : $e^x=3$

يعني : $\ln(e^x)=\ln 3$ أي : $x=\ln 3$

و بالتالي : المعادلة تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ و هو العدد الحقيقي $\ln 3$.

2

لنحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $e^{x+1}-e^{-x}\geq 0$

بعد تعميل الطرف الأيسر نحصل على: $e^{-x}(e^{2x+1}-1)\geq 0$

نلاحظ أن إشارة الطرف الأيسر تتعلق فقط بإشارة $(e^{2x+1}-1)$

و ذلك لأن : $e^{-x}>0$; $(\forall x\in\mathbb{R})$

لنحل أولا المعادلة $e^{2x+1}-1=0$. التي تعني : $e^{2x+1}=1$

إذن : $2x+1=\ln 1$ أي $2x+1=0$ أي $x=\frac{-1}{2}$

و بذلك نستنتج جدول الإشارة التالي :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
e^{-x}		$+$		$+$	
$e^{2x+1}-1$		$-$	0	$+$	
$e^{-x}(e^{2x+1}-1)$		$-$	0	$+$	

من خلال الجدول : $e^{-x}(e^{2x+1}-1)\geq 0$; $\forall x\in\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$

إذن (S) مجموعة حلول المتراجحة هي : $S=\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$

التمرين الثاني :

1

لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4(18)=-36=(6i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$z_1=\frac{6-6i}{2}=3(1-i) \quad \text{و} \quad z_2=\frac{6+6i}{2}=3(1+i)$$

2 أ

$$\begin{aligned} a=3+3i&=3(1+i)\\ &=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &=3\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b=3-3i&=3(1-i)\\ &=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}-i\sin\frac{-\pi}{4}\right)\\ &=3\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}\end{aligned}$$

2 ب

لدينا : $\begin{cases} aff(A)=a=3+3i=3\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\\ aff(B)=b=3-3i=3\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}\\ aff(B')=b' \end{cases}$

و لدينا كذلك الإزاحة t معرفة بما يلي : $\begin{array}{ccc}(\mathcal{P}) & \to & (\mathcal{P})\\ M & \to & M'=t_{\overrightarrow{OA}}(M)\end{array}$

لدينا : $t_{\overrightarrow{OA}}(B)=B'$

إذن : حسب التعريف المتجهي للإزاحة نكتب : $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OA}$

و باستعمال التعابير العقدية نكتب :

$$aff(B')-aff(B)=aff(A)-aff(O)$$

يعني : $b'-b=a$ يعني : $b'-3+3i=3+3i$

يعني : $b'=3+3i+3-3i=6$ و بالتالي : $aff(B')=6$

2 ج

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{b-b'}{a-b'}&=\frac{3-3i-6}{3+3i-6}=\frac{-3(i+1)}{-3(1-i)}=\frac{i+1}{1-i}\\ &=\frac{(i+1)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{1^2-i^2}=\frac{2i}{1-(-1)}=\frac{2i}{2}=i\end{aligned}$$

و بالتالي : $\frac{b-b'}{a-b'}=i$

و منه نستنتج أن : $\begin{cases}\left|\frac{b-b'}{a-b'}\right|=1\\ \arg\left(\frac{b-b'}{a-b'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}|b-b'|=|a-b'|\\ \left(\overrightarrow{B'A};\overrightarrow{B'B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}B'B=B'A\\ \left(\overrightarrow{B'A};\overrightarrow{B'B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}$

و من هاتين النتيجتين نستنتج أن المثلث ABB' متساوي الساقين رأسه B' و كذلك قائم الزاوية في نفس النقطة B' .

2 د

لدينا :
$$\begin{cases} OA = |z_A - z_O| = |a| = \left|3\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right| = 3\sqrt{2} \\ AB' = |z_{B'} - z_A| = |6 - 3 - 3i| = |3 - 3i| = 3\sqrt{2} \\ B'B = |z_B - z_{B'}| = |3 - 3i - 6| = 3\sqrt{2} \\ BO = |z_O - z_B| = |-3 + 3i| = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

نستنتج إذن أن : $OA = AB' = B'B = BO$

و منه فإن الرباعي $OAB'B$ مُعين لأن جميع أضلاعه متقايسة .

و بما أن الزاوية $\widehat{B'}$ زاوية قائمة حسب نتيجة السؤال ج) .

فإن الرباعي $OAB'B$ مربع لأنه معين و إحدى زواياه قائمة .

التمرين الثالث :

1 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$. لدينا : $u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1+15u_n}$

إذن : $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{6u_n}{1+15u_n} - \dfrac{1}{3}$

يعني : $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{18u_n - (1+15u_n)}{3(1+15u_n)}$

يعني : $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3u_n - 1}{3(1+15u_n)}$

إذن : $\boxed{u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{1+15u_n}}\ (*)$

1 ب

لنبرهن على صحة العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n > \frac{1}{3}$

لدينا : $u_0 = 1 > \frac{1}{3}$. إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n > \frac{1}{3}$

إذن : $\left(u_n - \frac{1}{3}\right)$ و $(15u_n + 1) > 6 > 0$

و منه فإن الكمية $\dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$ موجبة قطعا لأنها خارج كميتين موجبتين قطعا

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} > 0$

و منه حسب النتيجة $(*)$: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} - \frac{1}{3} > 0$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} > \frac{1}{3}$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n > \frac{1}{3}$

2

ليكن n عنصرا من المجموعة $\mathbb{N}$. لدينا :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1+15u_n}{6u_n}\right) = 1 - \frac{1+15u_n}{18u_n}$$
$$= \frac{18 - (1+15u_n)}{18u_n} = \frac{3u_n - 1}{18u_n} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{6u_n}$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{u_n - \frac{1}{3}}{u_n}\right) = \frac{1}{6}v_n$$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = \frac{1}{6}v_n$

إذن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$.

و منه فإن الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ يُكتب على الشكل التالي :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = v_0\left(\frac{1}{6}\right)^{n-0}$$

لدينا : $v_0 = 1 - \dfrac{1}{3u_0} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$

3

لدينا حسب السؤال 2) : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$

و نعلم أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 1 - \dfrac{1}{3u_n} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n = \dfrac{1}{3u_n}$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ و هو عدد حقيقي أصغر من 1 .

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

و منه : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}\right) = \dfrac{1}{3 - 2\times 0} = \dfrac{1}{3}$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \dfrac{1}{3}$

التمرين الرابع :

I 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $I =]0;+\infty[$.

لدينا : $g(x) = x - 1 + \ln x$

إذن : $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$

إذن : $(\forall x \in I)\ ;\ g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$

I 1 ب

ليكن x عنصرا من المجال I . إذن : $x > 0$

و منه : $x + 1 > 1 > 0$

إذن : $(\forall x \in I)\ ;\ \dfrac{x+1}{x} > 0$

يعني : $(\forall x \in I)\ ;\ g'(x) > 0$

أي أن الدالة g تزايدية قطعا على المجال I .

I 2

ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$. إذن : $x \geq 1$

و منه : $g(x) \geq g(1)$ لأن g دالة تزايدية قطعا على I

و لدينا : $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$

إذن : $\forall x \in [1;+\infty[\ ;\ g(x) \geq 0$

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1]$. إذن : $x \leq 1$

و منه : $g(x) \leq g(1)$ لأن g دالة تزايدية على I .

و لدينا : $g(1) = 0$

إذن : $\forall x \in]0;1]\ ;\ g(x) \leq 0$

II 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$

إذن :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x \\ &= \lim_{x\to0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x = \left(1-\frac{1}{0^+}\right)(-\infty) \\ &= (1-\infty)(-\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty\end{aligned}$$

إذن : $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ و تأويلها الهندسي هو أن المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور الأراتيب) مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر على اليمين.

II 1 ب

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x \\ &= \left(1-\frac{1}{+\infty}\right)(+\infty) = (1-0)(+\infty) = +\infty\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ $(\mathbf{1})$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0} \\ &= \left(1-\frac{1}{+\infty}\right)(0) = (1-0)(0) = 0\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0}$ $(\mathbf{2})$

II 1 ج

من النهايتين $(\mathbf{1})$ و $(\mathbf{2})$ نستنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

II 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$

إذن :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{x-1}{x}\right)'\ln x + (\ln x)'\left(\frac{x-1}{x}\right) \\ &= \left(\frac{x-(x-1)}{x^2}\right)\ln x + \frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x}\right) \\ &= \frac{\ln x + x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}\end{aligned}$$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

II 2 ب

ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$.

إذن حسب نتيجة السؤال I 2) : $g(x) \geq 0$

يعني : $\frac{g(x)}{x^2} \geq 0$ (لأن : $x > 0$)

و منه : $\forall x \in [1;+\infty[\ ;\ f'(x) \geq 0$

يعني أن الدالة تزايدية على المجال $[1;+\infty[$

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1]$.

إذن حسب نتيجة السؤال I 2) : $g(x) \leq 0$

يعني : $\frac{g(x)}{x^2} \leq 0$ (لأن : $x > 0$)

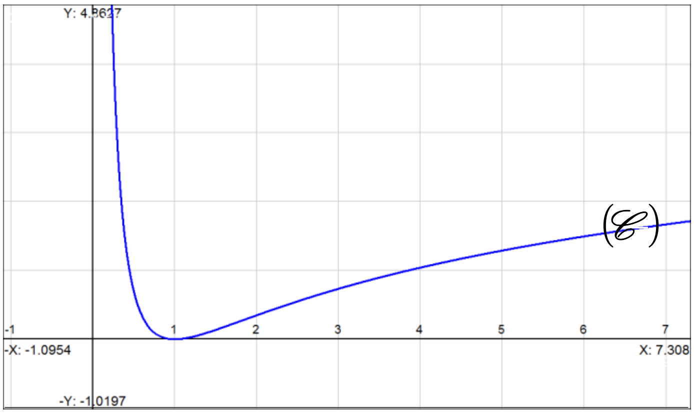
و منه : $\forall x \in]0;1]\ ;\ f'(x) \leq 0$

يعني أن الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$

II 2 ج

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

II 3



II 4 أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا : $H(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$

إذن : $H'(x) = \frac{2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{2} = \frac{\ln x}{x} = h(x)$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة h على المجال I .

II 4 ب

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

II 4 ج

$$\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v}\,dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv'dx$$
$$= [x\ln x]_1^e - \int_1^e \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx$$
$$= [x\ln x]_1^e - [x]_1^e = [x\ln x - x]_1^e$$
$$= (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1) = 0 - (-1) = 1$$

II 5 أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا :

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x = \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

II 5 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$.

نعلم أن التكامل يقيس دائما طول أو مساحة أو حجم .

إذن : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e |f(x)|\,dx$

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة f أن 0 قيمة دنوية للدالة f على I .

يعني : $(\forall x \epsilon I)\ ;\ f(x) \geq 0$

و منه : $(\forall x \epsilon I)\ ;\ |f(x)| = f(x)$

إذن : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left(\ln x - \frac{\ln x}{x}\right) dx$

$$= \int_1^e \ln x\,dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$$
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(unité)^2$$
$$= \frac{1}{2}(1\ cm)^2 = 0{,}5\ cm^2$$