التمرين الأول : (3 ن)

1 - أ

لدينا $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ إذن: $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&1\\0&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

منه : $\vec{n}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ، بما أن $\vec{n}\neq\vec{0}$ فإن O و A و B تحدد مستوى (OAB) و لدينا $\vec{n}$ منظمية عليها

إذن لكل نقطة $M(x,y,z)$ من الفضاء لدينا: $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

منه: $\boxed{M\in(OAB)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\vec{u}=0\Leftrightarrow x+y-z=0}$

ب

$$d=d(\Omega,(OAB))=\frac{|x_\Omega+y_\Omega-z_\Omega|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|1+1+1|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

بما أن : $\sqrt{3}<3$ أي $d(\Omega,(OAB))<R$

فإن المستوى (OAB) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها: $\boxed{r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}}$

للتذكير : $\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=ad-bc$

2 - أ

بما أن (Δ) عمودي على (OAB) فإن المتجهة $\vec{n}$ المنظمية على (OAB) هي متجهة موجه لـ (Δ)

و بما أن : $\Omega\in(\Delta)$ فإن: $(\Delta):\begin{cases}x=x_\Omega+t\\y=y_\Omega+t\ /t\in IR\\z=z_\Omega-t\end{cases}$ أي : $\boxed{(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\quad /t\in IR\\z=-1-t\end{cases}}$

ب

لتكن ω هي مركز الدائرة (Γ) إذن ω هي نقطة تقاطع (Δ) و (P)

إذن إحداثياتها هي حل النظمة : $\begin{cases}x+y-z=0\\x=1+t\\y=1+t\\z=-1-t\end{cases}$ منه : $\begin{cases}1+t+1+t+1+t=0\\x=1+t\\y=1+t\\z=-1-t\end{cases}$ منه : $\begin{cases}3t+3=0\\x=1+t\\y=1+t\\z=-1-t\end{cases}$

منه : $\begin{cases}t=-1\\x=0\\y=0\\z=0\end{cases}$ بالتالي: $\boxed{\omega(0,0,0)}$ (أي أن $w=O$)

التمرين الثاني : (3 ن)

1

أ) لدينا: $(1+i)(-3+6i)=-3+6i-3i-6=-9+3i$

و $\dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{-2+5i-7-2i}{4+8i-7-2i}=\dfrac{-9+3i}{-3+6i}=\dfrac{(1+i)(-3+6i)}{-3+6i}=1+i$

ب) لدينا: $1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\left[\sqrt{2}\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$

إذن: $\dfrac{c-a}{b-a}=\left[\sqrt{2}\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ منه: $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=\sqrt{2}$ و $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

منه: $\dfrac{AC}{AB}=\sqrt{2}$ بالتالي: $\boxed{AC=\sqrt{2}AB}$ و $\boxed{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]}$

2

أ) الصيغة العقدية للدوران $R\left(B,\dfrac{\pi}{2}\right)$ هي: $z'=e^{\frac{\pi}{2}i}(z-z_B)+z_B$ منه: $d=i(a-b)+b$

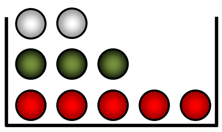
إذن: أي: $d=i(7+2i-4-8i)+4+8i$ أي: $d=i(3-6i)+4+8i$ أي: $d=3i+6+4+8i$

بالتالي: $\boxed{d=10+11i}$

ب) لدينا: $\dfrac{d-c}{b-c}=\dfrac{10+11i+2-5i}{4+8i+2-5i}=\dfrac{12+6i}{6+3i}=\dfrac{2(6+3i)}{6+3i}=2$

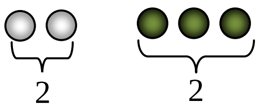
بما أن: $\dfrac{d-c}{b-c}=2\in IR$ فإن النقط B و C و D مستقيمية.

التمرين الثالث : (3 ن)

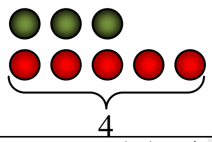


لتكن Ω مجموعة كون الإمكانيات: $Card(\Omega)=C_{10}^{4}=\dfrac{10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4}=10\times3\times7=210$

1



$p(A)=\dfrac{C_5^2\times C_3^2}{Card(\Omega)}=\dfrac{\dfrac{5\times4}{1\times2}\times\dfrac{3\times2}{1\times2}}{210}=\dfrac{10\times3}{10\times3\times7}=\dfrac{1}{7}$

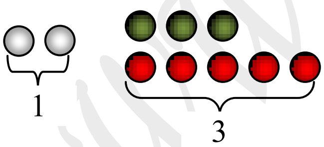


$p(B)=\dfrac{C_{10-2}^{4}}{Card(\Omega)}=\dfrac{C_8^4}{210}=\dfrac{\dfrac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4}}{10\times3\times7}=\dfrac{7\times2\times5}{10\times3\times7}=\dfrac{1}{3}$

2

أ) عند السحب يمكن أن نحصل على كرة بيضاء أو كرتين أو لا نحصل على أي كرة بيضاء ، إذن: $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

ب) لدينا:



$p(X=1)=\dfrac{C_2^1\times C_8^3}{Card(\Omega)}=\dfrac{2\times\dfrac{8\times7\times6}{1\times2\times3}}{210}=\dfrac{2\times8\times7}{2\times5\times3\times7}=\dfrac{8}{15}$

و $p(X=0)=p(B)=\dfrac{1}{3}$ و $p(X=2)=\dfrac{C_2^2\times C_8^2}{Card(\Omega)}=\dfrac{1\times\dfrac{8\times7}{2\times1}}{210}=\dfrac{4\times7}{2\times5\times3\times7}=\dfrac{2}{15}$

بالتالي:

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{2}{15}$

يمكن التحقق بسهولة أن: $p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=1$ كما يمكن حساب $p(X=2)$ بهذه المتساوية، لكن الأفضل حسابها مباشرة للتحقق من صحة النتائج السابقة.

التمرين الرابع : (3 ن)

$u_1 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{25}{10-u_n}$ لكل $n \in IN^*$

1

لدينا: $\forall n \in IN^* \quad 5-u_{n+1} = 5-\frac{25}{10-u_n} = \frac{50-5u_n-25}{10-u_n} = \frac{25-5u_n}{10-u_n} = \frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$

لنبين بالترجع بأن: $\forall n \in IN^* \quad 5-u_n > 0$

بالنسبة لـ: $n=1$: $5-u_1 = 5 > 0$ إذن العبارة صحيحة بالنسبة لـ: $n=1$

نفترض أن: $5-u_n > 0$ و نبين أن: $5-u_{n+1} > 0$

لدينا: $5-u_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} 5(5-u_n) > 0 \\ 5+(5-u_n) > 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)} > 0 \Rightarrow 5-u_{n+1} > 0$

بالتالي و حسب مبدأ الترجع نستنتج أن: $\forall n \in IN^* \quad 5-u_n > 0$

2

$\forall n \in IN^* \quad v_n = \frac{5}{5-u_n}$

أ

لدينا: $\forall n \in IN^* \quad v_{n+1} = \frac{5}{5-u_{n+1}} = \frac{5}{5-\frac{25}{10-u_n}} = \frac{5}{\frac{50-5u_n-25}{10-u_n}} = \frac{5(10-u_n)}{25-5u_n} = \frac{5(10-u_n)}{5(5-u_n)} = \frac{10-u_n}{5-u_n}$

و $\forall n \in IN^* \quad v_{n+1} - v_n = \frac{10-u_n}{5-u_n} - \frac{5}{5-u_n} = \frac{5-u_n}{5-u_n} = 1$

ب

بما أن: $\forall n \in IN^* \quad v_{n+1} - v_n = 1$ فإن: $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية حدها الأول: $v_1 = \frac{5}{5-u_1} = \frac{5}{5-0} = 1$ و أساسها $r = 1$

إذن: $\forall n \in IN^* \quad v_n = v_1 + r(n-1) = 1 + (n-1) = n$

و منه لكل $\forall n \in IN^*$: $n = \frac{5}{5-u_n}$ أي : $5-u_n = \frac{5}{n}$ بالتالي: $\forall n \in IN^* \quad u_n = 5-\frac{5}{n}$

ج

بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 5$

التمرين الخامس : (3 ن)

$f(x) = (x-2)^2 e^x$

1

أ

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2 = +\infty$ منه: $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)^2 = +\infty$ و لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ بالتالي: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب

لدينا: $\frac{f(x)}{x} = (x-2)^2 \frac{e^x}{x}$ $\forall x > 0$ و نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)^2 = +\infty$ إذن:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

و هذا يعني أن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$

2

أ

لدينا: $\forall x \in IR \quad f(x) = (x-2)^2 e^x = (x^2-4x+4)e^x = x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x$

ب

نعلم أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

و هذا يعني أن منحنى الدالة f يقبل مقاربا أفقيا جوار $-\infty$ معادلته: $y = 0$ (محور الأفاصيل)

لدينا: $\forall x\in IR \quad f'(x)=\left(x^2e^x-4xe^x+4e^x\right)'=\left(x^2\right)'e^x+x^2\left(e^x\right)'-4\left(x'e^x+x\left(e^x\right)'\right)+4\left(e^x\right)'$

$$f'(x)=2xe^x+x^2e^x-4e^x-4xe^x+4e^x=x^2e^x-2xe^x=x(x-2)e^x$$

3

أ

الأفضل الاشتقاق بالصيغة الأصلية للدالة :

$$\forall x\in IR \quad f'(x)=\left((x-2)^2e^x\right)'=\left((x-2)^2\right)'e^x+(x-2)^2\left(e^x\right)'$$

$$f'(x)=2(x-2)(x-2)'e^x+(x-2)^2e^x$$

$$f'(x)=2(x-2)e^x+(x-2)^2e^x$$

$$f'(x)=(x-2)e^x(2+x-2)=x(x-2)e^x$$

رغم أنها تبدو الأصعب لكنها الأفضل في حال كان الأس كبيرا، إذ سيتعذر نشر التعبير لأجل الاشتقاق.

ب

بما أن $\forall x\in IR \quad e^x>0$ فإن $f'(x)$ لها نفس إشارة الحدودية: $x(x-2)$

و التي نعلم أنها تنعدم في 0 و 2 و تكون موجبة خارج هذين الجذرين أي في المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ و تكون سالبة داخل الجذرين أي في المجال $[0;2]$

إذن f تزايدية على كل من $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ و تناقصية على $[0;2]$

ج

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4

أ

لدينا : $\forall x\in IR \quad f''(x)=\left(x(x-2)e^x\right)'=\left(\left(x^2-2x\right)e^x\right)'=\left(x^2-2x\right)'e^x+\left(x^2-2x\right)\left(e^x\right)'$

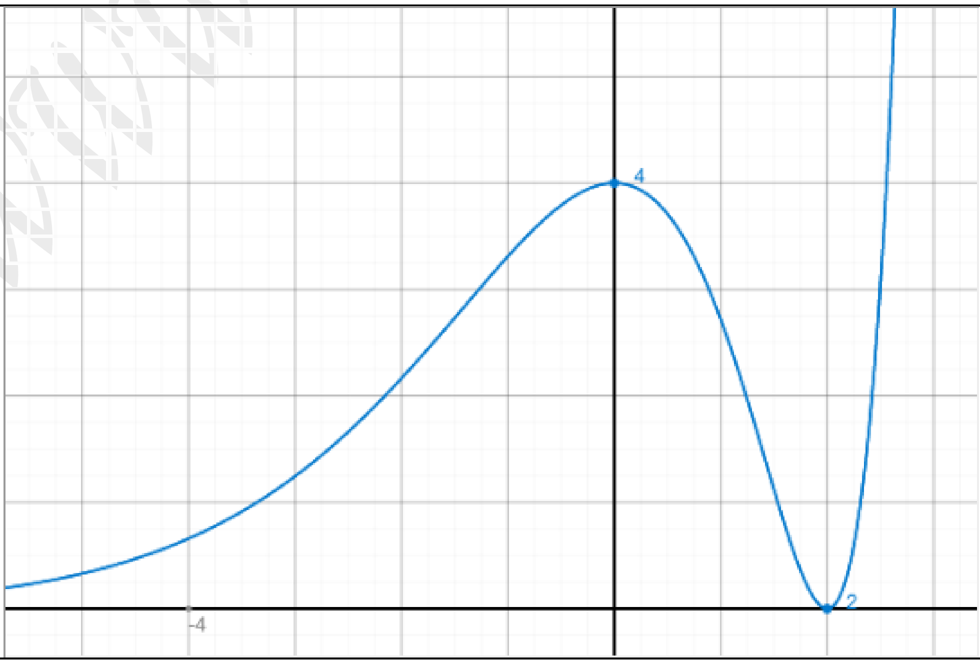
$$f''(x)=(2x-2)e^x+\left(x^2-2x\right)e^x=e^x\left(2x-2+x^2-2x\right)=\left(x^2-2\right)e^x$$

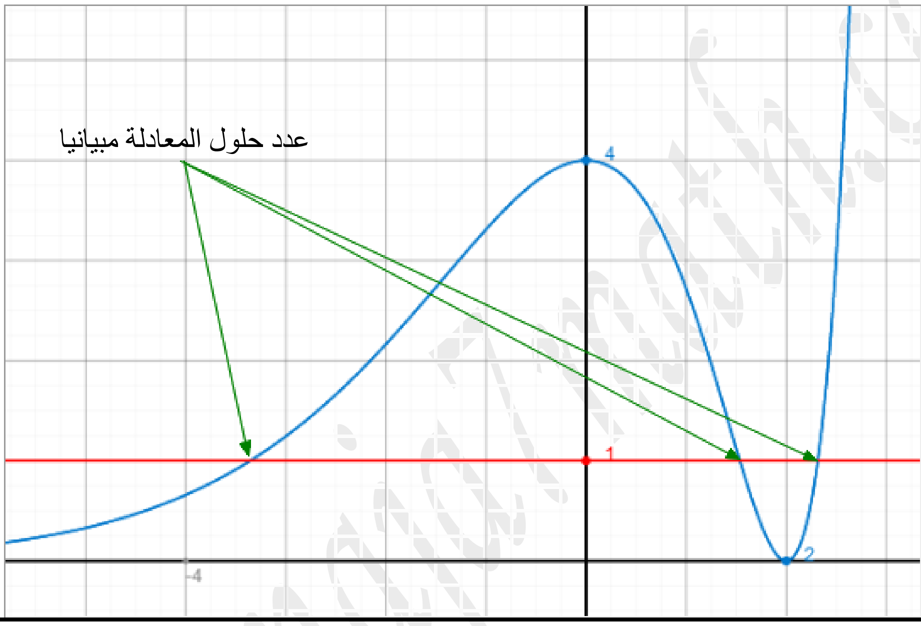
بما أن $\forall x\in IR \quad e^x>0$ فإن $f''(x)$ لها نفس إشارة الحدودية: x^2-2

و التي نعلم أنها تنعدم في $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ و تكون موجبة خارج هذين الجذرين أي في المجالين $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$ و $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ و تكون سالبة داخل الجذرين أي في المجال $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

إذن f'' تنعدم و تغير إشارتها في كل من $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ و هذا يعني أن لمنحنى الدالة f نقطتا انعطاف أفصولاهما هما $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$

ب



<table>
<tr><td>5</td><td>أ</td><td>لدينا: $\forall x\in IR \quad H'(x)=((x-1)e^x)'=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'=e^x+(x-1)e^x=e^x+xe^x-e^x=xe^x$
إذن $H(x)$ هي دالة أصلية للدالة: $h:x\mapsto xe^x$ ، منه: $\int_0^1 xe^x\,dx=[(x-1)e^x]_0^1=0-(-1)=1$</td></tr>
<tr><td></td><td>ب</td><td>نضع: $u(x)=x^2$ و $v(x)=e^x$ منه: $u'(x)=2x$ و $v'(x)=e^x$
منه:
$\int_0^1 x^2e^x\,dx=\int_0^1 u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_0^1-\int_0^1 u'(x)v(x)dx=[x^2e^x]_0^1-\int_0^1 2xe^x\,dx=e-0-2\times1=e-2$</td></tr>
<tr><td></td><td>ج</td><td>المساحة المطلوبة هي:
$A=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2e^x-4xe^x+4e^x\,dx=\int_0^1 x^2e^x\,dx-4\int_0^1 xe^x\,dx+4[e^x]_0^1$
$A=e-2-4\times1+4(e-1)=e-2-4+4e-4=5e-10=5(e-2)\ cm^2$</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td>لدينا لكل عدد حقيقي x: $x^2=e^{-x}+4x-4 \Leftrightarrow x^2-4x+4=\frac{1}{e^x} \Leftrightarrow (x-2)^2e^x=1 \Leftrightarrow f(x)=1$
إذن حسب المنحنى نجد أن لهذه المعادلة 3 حلول:

</td></tr>
</table>